Ejercicios Resueltos
Ecuaciones Diferenciales Parciales

Problema 1: Resuelva

$$u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0, \qquad 1 < r < 2, \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$$
$$u_\theta(r,0) = u_\theta\left(r,\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad 1 < r < 2$$
$$u(1,\theta) = 0, \quad u_r(2,\theta) = \theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}$$

Solución: Sea $u(r,\theta) = M(r)\,N(\theta)$. Entonces

$$\begin{aligned} u_r &= M'(r)\,N(\theta), \qquad & u_{rr} &= M''(r)\,N(\theta) \\ u_\theta &= M(r)\,N'(\theta), \qquad & u_{\theta\theta} &= M(r)\,N''(\theta) \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación se obtiene

$$r^2 M''(r)N(\theta) + rM'(r)N(\theta) + M(r)N(\theta) = 0$$

de donde $\dfrac{r^2M''(r) + rM'(r)}{-M(r)} = \dfrac{N''(\theta)}{N(\theta)} = -\lambda.$

Se obtienen de este modo dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$N''(\theta) + \lambda N(\theta) = 0$$
$$r^2M''(r) + rM'(r) - \lambda M(r) = 0$$

A partir de las condiciones de frontera $u_\theta(r,0) = u_\theta\left(r, \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ se obtiene el problema de Sturm-Liouville

$$N''(\theta) + \lambda N(\theta) = 0$$
$$N'(0) = N'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_0 = 0, \qquad \qquad \lambda_n = 4n^2$$

y respectivas autofunciones

$$N_0(\theta) = 1, \qquad \qquad N_n(\theta) = \cos(2n\theta)$$

Resolvemos la ecuación diferencial para $M(r)$:

(i) para $\lambda = 0$, $\qquad M_0(r) = A_0 + B_0\ln(r)$

(ii) para $\lambda = 4n^2$, $\qquad M_n(r) = A_nr^{2n} + B_nr^{-2n}$

La solución formal de la ecuación queda entonces

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0\ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_nr^{2n} + B_nr^{-2n}\right)\cos(2n\theta)$$

Usamos ahora las condiciones iniciales para encontrar los coeficientes:

$u(1,\theta) = 0 \Longrightarrow 0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\cos(2n\theta)$

implica que $A_0 = 0$ y $B_n = -A_n$ para todo n.

De esta manera

$$u(r,\theta) = B_0\ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(r^{2n} - r^{-2n}\right)\cos(2n\theta)$$

A partir de esta última

$$u_r(r,\theta) = \frac{B_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(2nr^{2n-1} + 2nr^{-2n-1}\right)\cos(2n\theta)$$

y entonces

$u_r(2,\theta) = \theta \Longrightarrow \theta = \dfrac{B_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(n2^{2n} + n2^{-2n}\right)\cos(2n\theta)$

donde

$B_0 = \dfrac{2}{\frac{\pi}{2}} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta\, d\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$A_n \left(n2^{2n} + n2^{-2n}\right) = \dfrac{2}{\frac{\pi}{2}} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta \cos(2n\theta)\, d\theta$

Resolviendo esta integral nos queda

$A_n = \dfrac{1}{n^3\pi\left(2^{2n} + 2^{-2n}\right)}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{-2}{n^3\pi(2^{2n}+2^{-2n})} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

Finalmente

$$u(r,\theta) = \frac{\pi}{2}\ln(r) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3\left(2^{4n-2} + 2^{-4n+2}\right)}\left(r^{4n-2} - r^{-4n+2}\right)\cos((4n-2)\theta)$$

Problema 2: Encontrar los autovalores y autofunciones del problema

$$y'' + 2y' + (\lambda + 2)y = 0, \qquad y(0) = 0, \;\; y(1) = 0$$

Solución: La ecuación es de coeficientes constantes y su ecuación característica es

$$k^2 + 2k + (\lambda + 2) = 0$$

Las solución de esta ecuación de segundo grado es $k = -1 \pm \sqrt{-1-\lambda}$

(i) Si $-1-\lambda < 0$ (o sea, $\lambda < -1$) la solución es de la forma

$$y(x) = A\,e^{-1+\sqrt{-1-\lambda}} + Be^{-1-\sqrt{-1-\lambda}}$$

Ahora, $y(0) = 0 \Longrightarrow A + B = 0 \Longrightarrow B = -A$; de este modo $y(x) = A\left(e^{-1+\sqrt{-1-\lambda}} - e^{-1+\sqrt{-1-\lambda}}\right)$.

Usando la segunda condición

$y(1) = 0 \Longrightarrow Ae^{-1}\left(e^{\sqrt{-1-\lambda}} - e^{\sqrt{-1-\lambda}}\right) = 0$

Si $A \neq 0$, entonces necesariamente $\lambda = -1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen autovalores $\lambda < -1$.

(ii) Si $\lambda = -1$, entonces la ecuación tiene una raíz de multiplicidad dos y la solucón de la ecuación es

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

De $y(0) = 0$ se obtiene $A = 0$ y la solución tiene la forma $y(x) = Bxe^{-x}$. Ahora, $y(1) = 0 \Longrightarrow B = 0$ y por lo tanto $\lambda = -1$ no es autovalor.

(iii) Si $-1 - \lambda < 0$ (es decir $\lambda > -1$), la solución de la ecuación queda

$$y(x) = e^{-x}\left(A\cos\left(\sqrt{\lambda+1}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda+1}x\right)\right)$$

De $y(0) = 0$ se obtiene $A = 0$, y la solución es de la forma $y(x) = Be^{-x}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda+1}x\right)$

Ahora,

$y(1) = 0 \Longrightarrow Be^{-1}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda+1}\right) = 0$

y esto implica (suponiendo que $B \neq 0$) que $\sqrt{\lambda+1} = n\pi$, de donde $\lambda = n^2\pi^2 - 1$ son los autovalores de la ecuación.

Las autofunciones están dadas por $y_n(x) = e^{-x}\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)$

Problema 3: Calcule $u\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, donde $u(x,t)$ satisface

$$u_t = u_{xx} - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \qquad 0 < x < 1$$

Solución: Hacemos $u(x,t) = v(x,t) + q(x)$. Entonces $v_t = u_t$, $u_x(x,t) = v_x(x,t) + q'(x)$ y $u_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t) + q''(x)$.

Reemplazando en la ecuación tenemos

$$v_t = v_{xx} + q''(x) - 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$v(0,t) + q(0) = 0, \quad v_x(1,t) + q'(1) = 0, \qquad t > 0$$
$$v(x,0) + q(x) = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \qquad 0 < x < 1$$

Para que el problema quede homogéneo, $q(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$q''(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \qquad q(0) = 0, \qquad q'(1) = 0$$

La solución de esta ecuación es $q(x) = \dfrac{-8}{\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

El problema que debemos resolver queda

$$v_t = v_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$v(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0, \qquad t > 0$$
$$v(x,0) = \frac{8}{\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \qquad 0 < x < 1$$

Hacemos $v(x,t) = M(x)\,N(t)$, de donde $v_t = M\,N'$ y $v_{xx} = M''\,N$; reemplazando en la ecuación nos queda $M(x)N'(t) = M''(x)\,N(t)$.

Entonces $\dfrac{M''(x)}{M(x)} = \dfrac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$, de donde se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$M''(x) + \lambda M(x) = 0 \qquad \wedge \qquad N'(t) + \lambda N(t) = 0$$

De las condiciones de borde, se obtiene el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} &M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ &M(0) = M'(1) = 0 \end{aligned}$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$ y autofunciones $M_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$.

Por otra parte, la solución de la ecuación para $N(t)$ es $N_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\right)t}$

Por lo tanto

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\right)t} \operatorname{sen}\left(\tfrac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$$

Como $v(x,0) = \dfrac{8}{\pi^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) + 4\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi x}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$ se tiene

$C_1 = \dfrac{8}{\pi^2}$, $C_2 = 4$, $C_n = 0$ para todo $n \geq 3$.

Por tanto $v(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2} e^{-\pi^2 t/4} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) + 4e^{-9\pi^2 t/4}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi x}{2}\right)$

La solución de la ecuación original queda

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} e^{-\pi^2 t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4e^{-9\pi^2 t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \frac{8}{\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$u\left(\frac{1}{2}, 4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{8}{\pi^2}e^{-\pi^2} + 4e^{-9\pi^2} - \frac{8}{\pi^2}\right)$$

Problema 4: Resuelva

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u = u_{tt}, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t > 0 \\ &u(x,0) = 1,\ u_x(x,1) = 1, \qquad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Solución: Hacemos $u(x,t) = M(x)N(t)$, se tiene $u_{xx} = M''(x)N(t)$, $u_{tt} = M(x)N''(t)$. Reemplazando en la ecuación

$M''(x)N(t) + M(x)N(t) = M(x)N''(t) \Longrightarrow \dfrac{M''(x) + M(x)}{M(x)} = \dfrac{N''(t)}{N(t)} = -\lambda$

y se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$M''(x) + (\lambda + 1)M(x) = 0, \qquad \wedge \qquad N''(t) + \lambda N(t) = 0$$

A partir de las condiciones de borde se obtiene el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} &M''(x) + (\lambda + 1)M = 0 \\ &M(0) = M(1) = 0 \end{aligned}$$

cuyos autovalores y autofunciones son, respectivamente

$\lambda_n = n^2\pi^2 - 1, \qquad M_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x)$

A su vez, la solución de la ecuación para $N(t)$ es

$$N_n(t) = A_n \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, t) + B_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, t)$$

Por lo tanto la solución formal de la ecuación queda

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, t) + B_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, t) \Big) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Solo nos resta calcular A_n y B_n. Ocupando las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x) \Longrightarrow A_n = 2\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)dx = \frac{2((-1)^{n+1}+1)}{n\pi}$$

Por otro lado

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, A_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, t) + \sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, B_n \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, t) \Big) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

y entonces

$$u_t(x,1) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, A_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}) + \sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, B_n \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}) \Big) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$$\Longrightarrow -\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, A_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}) + \sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, B_n \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}) = 2\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)dx = \frac{2((-1)^{n+1}+1)}{n\pi}$$

Esto implica que

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1})} \left(\frac{2((-1)^{n+1}+1)}{n\pi} + \sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, A_n \operatorname{sen}(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}) \right)$$

Problema 5: Resolver

$$u_{tt} = u_{xx} + 1, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 1, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$u(x,0) = -x^2 + \frac{1}{2}\pi x, \qquad u_t(x,0) = 0$$

Ayuda: use $\qquad u(x,t) = w(x,t) + p(x)$

$$\int x \operatorname{sen}(x)dx = \operatorname{sen}(x) - x\cos(x)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)dx = -x^2\cos(x) + 2\cos(x) + 2x\operatorname{sen}(x)$$

Solución: $u_{tt} = w_{tt}$ y $u_{xx} = w_{xx} + P''(x)$. Para que la ecuación sea homogénea, hacemos $P''(x) = -1$ obteniendo $P(x) = -\frac{x^2}{2} + cx + d$.

Para determinar las constantes, usamos las condiciones de borde

$$u(0,t) = w(0,t) + P(0) = 1 \Longrightarrow P(0) = 1 \Longrightarrow d = 1$$

y

$$u_x(\frac{\pi}{2},t) = w_x(\frac{\pi}{2},t) + P'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow P'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow c = 0$$

Concluimos que $P(x) = -\frac{x^2}{2} + 1$.

De las condiciones iniciales obtenemos

$$u(x,0) = w(x,0) - \frac{x^2}{2} + 1 = -x^2 + \frac{\pi}{2}x \Longrightarrow w(x,0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1$$

y

$$u_t(x,0) = 0 \Longrightarrow w_t(x,0) = 0$$

Ahora, usamos variables separadas para resolver

$$w_{tt} = w_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$$

$$w(0,t) = w_x(\frac{\pi}{2},t) = 0$$

$$w(x,0) = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1, \quad w_t(x,0) = 0$$

Sea $w(x,t) = M(x)N(t)$, reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} M''(x) + \lambda M(x) & = & 0 \\ M(0) = M'(\frac{\pi}{2}) & = & 0 \end{array}\right| \quad \text{y} \quad N''(t) + \lambda N(t) = 0$$

Los autovalores y autofunciones del problema de Sturm-Liouville son

$$\lambda_n = (2n+1)^2 \quad \text{y} \quad M_n(x) = \operatorname{sen}(2n+1)x, \quad \forall\, n \geq 0$$

Por lo tanto, la solución formal de la ecuación es

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(2n+1)t + b_n \operatorname{sen}(2n+1)t] \operatorname{sen}(2n+1)x$$

Calculemos los coeficientes a_n y b_n

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1 = w(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(2n+1)x \Longrightarrow a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - 1) \operatorname{sen}(2n+1)x\, dx$$

Usando las fórmulas dadas, obtenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x^2 \operatorname{sen}(2n+1)x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(2n+1)^3} - (-1)^n \frac{\pi}{(2n+1)^2}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x \operatorname{sen}(2n+1)x\, dx = (-1)^n \frac{\pi}{(2n+1)^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2n+1)x\, dx = \frac{1}{2n+1}$$

Por lo tanto,
$$a_n = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
Derivando la solución formal con respecto a t, obtenemos
$$w_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[-a_n(2n+1)\operatorname{sen}(2n+1)t + b_n(2n+1)\cos(2n+1)t]\operatorname{sen}(2n+1)x$$
Evaluando en $t=0$, se tiene
$$w_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(2n+1)\operatorname{sen}(2n+1)x = 0 \Longrightarrow b_n = 0,\ \forall\, n \geq 0$$
Luego, la solución de la ecuación es
$$u(x,t) = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^3} - \frac{1}{2n+1}\right)\cos(2n+1)t\right]\operatorname{sen}(2n+1)x$$

Problema 6: Encontrar la solución del problema
$$\begin{aligned}
&r^2\, u_{rr} + r\, u_r + u_{\theta\theta} = 0, \qquad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\\
&u_\theta(r,0) = u_\theta\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad 1 < r < 2\\
&u(1,\theta) = 0, \qquad u_r(2,\theta) = \theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Solución: Sea $u(r,\theta) = M(r)\,N(\theta)$. Entonces
$$\begin{aligned}
u_r &= M'(r)\,N(\theta), \qquad & u_{rr} &= M''(r)\,N(\theta)\\
u_\theta &= M(r)\,N'(\theta), \qquad & u_{\theta\theta} &= M(r)\,N''(\theta)
\end{aligned}$$
reemplazando en la ecuación se obtiene
$$r^2M''(r)N(\theta) + rM'(r)N(\theta) + M(r)N(\theta) = 0$$
de donde $\dfrac{r^2M''(r) + rM'(r)}{-M(r)} = \dfrac{N''(\theta)}{N(\theta)} = -\lambda.$

Se obtienen de este modo dos ecuaciones diferenciales ordinarias
$$\begin{aligned}
&N''(\theta) + \lambda N(\theta) = 0\\
&r^2M''(r) + rM'(r) - \lambda M(r) = 0
\end{aligned}$$
A partir de las condiciones de frontera $u_\theta(r,0) = u_\theta\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ se obtiene el problema de Sturm-Liouville
$$\begin{aligned}
&N''(\theta) + \lambda N(\theta) = 0\\
&N'(0) = N'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$
cuyos autovalores son

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_n = 4n^2$$

y respectivas autofunciones

$$N_0(\theta) = 1, \qquad N_n(\theta) = \cos(2n\theta)$$

Resolvemos la ecuación diferencial para $M(r)$:

(i) para $\lambda = 0$, $\qquad M_0(r) = A_0 + B_0 \ln(r)$

(ii) para $\lambda = 4n^2$, $\qquad M_n(r) = A_n r^{2n} + B_n r^{-2n}$

La solución formal de la ecuación queda entonces

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^{2n} + B_n r^{-2n} \right) \cos(2n\theta)$$

Usamos ahora las condiciones iniciales para encontrar los coeficientes:

$u(1,\theta) = 0 \Longrightarrow 0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cos(2n\theta)$

implica que $A_0 = 0$ y $B_n = -A_n$ para todo n.

De esta manera

$$u(r,\theta) = B_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(r^{2n} - r^{-2n} \right) \cos(2n\theta)$$

A partir de esta última

$$u_r(r,\theta) = \frac{B_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(2nr^{2n-1} + 2nr^{-2n-1} \right) \cos(2n\theta)$$

y entonces

$u_r(2,\theta) = \theta \Longrightarrow \theta = \dfrac{B_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(n2^{2n} + n2^{-2n} \right) \cos(2n\theta)$

donde

$B_0 = \dfrac{2}{\frac{\pi}{2}} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta \, d\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$A_n \left(n2^{2n} + n2^{-2n} \right) = \dfrac{2}{\frac{\pi}{2}} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta \cos(2n\theta) \, d\theta$

Resolviendo esta integral nos queda

$A_n = \dfrac{1}{n^3\pi \left(2^{2n} + 2^{-2n} \right)} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{-2}{n^3\pi (2^{2n} + 2^{-2n})} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

Finalmente

$$u(r,\theta) = \frac{\pi}{2} \ln(r) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3 \left(2^{4n-2} + 2^{-4n+2} \right)} \left(r^{4n-2} - r^{-4n+2} \right) \cos((4n-2)\theta)$$

Problema 7: Encuentre la solución $u(r,\theta)$ de la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, r > 2 \\ u(r,0) = u(r,2\pi), \;\; u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi) & r > 2 \\ u(2,\theta) = \theta, \qquad \lim_{r\to\infty} u(r,\theta) < \infty \end{cases}$$

Solución: Para usar separación de variables, hacemos $u(r,\theta) = M(r)\,N(\theta)$, de donde $u_r = M'(r)\,N(\theta)$, $u_{rr} = M''(r)\,N(\theta)$, $U_\theta = M(r)\,N'(\theta)$, $u_{\theta\theta} = M(r)\,N''(\theta)$.

Reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$r^2\,M''(r)\,N(\theta) + r\,M'(r)\,N(\theta) + M(r)\,N(\theta) = 0$$

Esto implica que $$\frac{r^2\,M(r) + r\,M(r)}{-M(r)} = \frac{N''(\theta)}{N(\theta)} = -\lambda.$$

A partir de las condiciones de periodicidad se obtiene el problema de Sturm-Liouville

$$\left.\begin{array}{r} N''(\theta) + \lambda N(\theta) = 0 \\ N(0) = N(2\pi), \quad N'(0) = N'(2\pi) \end{array}\right|$$

cuyos autovalores son $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = n^2$ y autofunciones son $N_0(\theta) = 1$ y $N_n(\theta) = \begin{cases} \cos(n\theta), & \forall n \geq 1 \\ \operatorname{sen}(n\theta), & \forall n \geq 1 \end{cases}$

Resolvemos ahora la ecuación para $M(r)$:

(i) Con $\lambda_0 = 0$, $M_0(r) = \dfrac{B_0}{2} + A_0 \ln(r)$

(ii) Con $\lambda_n = n^2$, $M_n(r) = a_n\,r^n + b_n\,r^{-n}$

Por lo tanto

$$u(r,\theta) = \frac{B_0}{2} + A_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n\,r^n + B_n\,r^{-n}\right)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n\,r^n + D_n\,r^{-n}\right)\operatorname{sen}(n\theta)$$

Como $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) < \infty$, se debe cumplir que $A_0 = 0$, $A_n = 0$, $C_n = 0$, y entonces

$$u(r,\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,r^{-n}\cos(n\theta) + D_n\,r^{-n}\operatorname{sen}(n\theta)$$

Usamos ahora la condicion inicial $u(2,\theta) = \theta$ para calcular los coeficientes de esta serie:

$$\theta = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,2^{-n}\cos(n\theta) + D_n\,2^{-n}\operatorname{sen}(n\theta)$$

donde

$$B_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta\,d\theta = 2\pi$$

$$B_n 2^{-n} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta\,\cos(n\theta)\,d\theta = 0$$

$$D_n\,2^{-n} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta\,\operatorname{sen}(n\theta)\,d\theta = \frac{-2}{2n}$$

Esta última igualdad implica que $D_n = \dfrac{-\,2^{n+1}}{n}$

Por lo tanto, la solución buscada es

$$u(r,\theta) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\,2^{n+1}}{n}\,r^{-n}\operatorname{sen}(n\theta)$$

Problema 8: Se sabe que los autovalores y autofunciones del problema de Sturm-Liouville siguiente $y''+(\lambda-1)y=0, \quad y(0)=0, \;\; y'(1)=0,$ son, respectivamente $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}+1, \quad y_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$. Use esa información para resolver

$$\begin{cases} u_{tt}+2u_t = u_{xx}-u & , \quad 0<x<1,\; t>0 \\ u(0,t)=0, \quad u_x(1,t)=0 & , \quad t>0 \\ u(x,0)=4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+2\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}x\right) & , \quad t>0 \\ u_t(x,0)=\dfrac{3\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}x\right)+\dfrac{7\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{2}x\right) & , \quad t>0 \end{cases}$$

Solución: Hacemos $u(x,t)=M(x)N(t)$. Entonces $u_x = M'(x)\,N(t), \quad u_{xx}=M''(x)\,N(t), \quad u_t = M(x)\,N'(t)$ y $u_{tt}=M(x)\,N''(t)$. Reemplazando en la ecuación

$$M(x)\,N''(t)+2M(x)\,N'(t) = M''(x)\,N(t)-M(x)\,N(t)$$

De aquí se sigue que

$$\frac{M''(x)-M(x)}{M(x)} = \frac{N''(t)+2N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

y se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} M''(x)+(\lambda-1)M(x)=0 \\ N''(t)+2N'(t)+\lambda N(t)=0 \end{cases}$$

A partir de las condiciones de frontera obtenemos $M(0)=0$ y $M'(1)=0$ y con ello formamos el problema de Sturm-Liouville

$$\left.\begin{array}{r} M''(x)+(\lambda-1)M(x)=0 \\ M(0)=M'(1)=0 \end{array}\right|$$

cuyos autovalores y autofunciones son, respectivamente $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}+1, \quad y_n(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$.

Resolvemos ahora la ecuación $N''(t)+2N'(t)+\lambda N(t)=0$.

La ecuación característica es $k^2+2k+\lambda=0$ y la solución de ésta es $k=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$; como $\lambda>1$, las soluciones son $k=1\pm i\,\sqrt{\lambda-1}$.

Por lo tanto

$$N(t)=e^{-t}\left(A\cos(\sqrt{\lambda-1}\;t)+B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda-1}\;t)\right)$$

y entonces

$$N_n(t)=e^{-t}\left(A_n\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)\right)$$

De este modo

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t}\left(A_n\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$$

y también

$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-e^{-t}\left(A_n\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)+B_n\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)\right)+\right.$

$$e^{-t}\left(A_n\,\tfrac{-(2n-1)\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)+B_n\,\tfrac{(2n-1)\pi}{2}\,\cos\left(\tfrac{(2n-1)\pi}{2}\,t\right)\right)\Big]\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$$

Con la condición inicial $u(x,0)=4\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}x\right)$ obtenemos

$$u(x,0)=4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$$

de donde $A_1=4,\quad A_3=2$ y $A_n=0$ para todo $n\in\mathbb{N}-\{1,3\}$

Considerando la condicion inicial , $u_t(x,0)=\dfrac{3\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}x\right)+\dfrac{7\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{7\pi}{2}x\right)$ tenemos

$$\frac{3\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)+\frac{7\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{2}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n+B_n\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)$$

Esto es equivalente a

$$\begin{aligned}\tfrac{3\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi}{2}x\right)+\tfrac{7\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{7\pi}{2}x\right)&=\left(-A_1+\tfrac{\pi}{2}B_1\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\,x\right)+\left(-A_2+\tfrac{3\pi}{2}B_2\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi}{2}\,x\right)\\&+\left(-A_3+\tfrac{5\pi}{2}B_3\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{5\pi}{2}\,x\right)+\left(-A_4+\tfrac{7\pi}{2}B_4\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{7\pi}{2}\,x\right)+\sum_{n=5}^{\infty}B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}\tfrac{3\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi}{2}x\right)+\tfrac{7\pi}{2}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{7\pi}{2}x\right)&=\left(-4+\tfrac{\pi}{2}B_1\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\,x\right)+\tfrac{3\pi}{2}B_2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi}{2}\,x\right)\\&+\left(-2+\tfrac{5\pi}{2}B_3\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{5\pi}{2}\,x\right)+\tfrac{7\pi}{2}B_4\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{7\pi}{2}\,x\right)+\sum_{n=5}^{\infty}B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\,x\right)\end{aligned}$$

Se obtienen las relaciones siguientes

$-4+\frac{\pi}{2}\,B_1=0\Longrightarrow B_1=\frac{8}{\pi},\qquad \frac{3\pi}{2}\,B_2=\frac{3\pi}{2}\Longrightarrow B_2=1,$

$-2+\frac{5\pi}{2}\,B_3=0\Longrightarrow B_3=\frac{4}{5\pi},\qquad \frac{7\pi}{2}\,B_4=\frac{7\pi}{2}\Longrightarrow B_4=1$

y $B_n=0$ para todo $n\geq 5$.

Finalmente

$$\begin{aligned}u(x,t)=e^{-t}\Big[&\left(4\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)+\tfrac{8}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)+\mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi}{2}t\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi}{2}x\right)+\\&\left(2\cos\left(\tfrac{5\pi}{2}t\right)+\tfrac{4}{5\pi}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{5\pi}{2}x\right)+\mathrm{sen}\left(\tfrac{7\pi}{2}t\right)\mathrm{sen}\left(\tfrac{7\pi}{2}x\right)\Big]\end{aligned}$$

Problema 9:

(a) Calcule los autovalores y autofunciones del problema de valores en la frontera siguiente:

$$y''-3y'+2(1+\lambda)y=0,\qquad\qquad y(0)=0,\quad y(1)=0$$

(b) Resuelva la siguiente ecuación

$$\begin{array}{ll}u_{xx}-3u_x=2u_{tt}-2u & 0<x<1,\ t>0\\ u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0 & t>0\\ u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=e^{3x/2} & 0<x<1\end{array}$$

Solución:

(a) La ecuación $y''-3y'+2(1+\lambda)\,y=0$ tiene ecuación característica $k^2-3k+2(1+\lambda)=0$, cuya solución es $k=\dfrac{3\pm\sqrt{1-8\lambda}}{2}$.

Se distinguen entonces tres casos:

(i) Si $1-8\lambda<0$, entonces $k=\dfrac{3\pm i\sqrt{8\lambda-1}}{2}$ y la solución de la ecuación es

$$y(x)=e^{3x/2}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{8\lambda-1}}{2}x\right)+B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{8\lambda-1}}{2}x\right)\right]$$

Ahora, es inmediato que si $y(0)=0$ entonces $A=0$, por lo tanto $y(x)$ queda

$$y(x)=B\,e^{3x/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{8\lambda-1}}{2}x\right)$$

Usando ahora $y(1)=0$ se obtiene $B\,e^{3/2}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\sqrt{8\lambda-1}}{2}\right)=0$; como buscamos soluciones no triviales asumimos que $B\neq 0$, y se tiene entonces que

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{8\lambda-1}}{2}\right)=0\iff\frac{\sqrt{8\lambda-1}}{2}=n\pi$$

de donde obtenemos que los autovalores son

$$\lambda_n=\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2},\qquad\forall n\geq 1$$

y las autofunciones

$$y_n(x)=e^{3x/2}\,\mathrm{sen}(n\pi x),\qquad\forall n\geq 1$$

(ii) Si $1-8\lambda=0$, entonces $k=\frac{3}{2}$ y la solución es de la forma

$$y(x)=A\,e^{3x/2}+Bx\,e^{3x/2}$$

Ahora, $y(0)=0$ implica que $A=0$; entonces $y(x)=Bx\,e^{3x/2}$. Pero, de $y(1)=0$ obtenemos $B=0$, y esto implica que no hay autovalores tales que $1-8\lambda=0$.

(iii) Si $1-8\lambda>0$, entonces $k_1=\dfrac{3+\sqrt{1-8\lambda}}{2}$, $k_2=\dfrac{3+\sqrt{1-8\lambda}}{2}$ reales y la solución queda

$$y(x)=A\,e^{k_1x}+B\,e^{k_2x}$$

Ahora, $y(0)=0$ implica que $A+B=0$ es decir $B=-A$, y la solución queda

$$y(x)=A\,e^{3x/2}\left(e^{\mu x}-e^{-\mu x}\right)$$

donde $\mu=\frac{\sqrt{1-8\lambda}}{2}$.

Por otro lado, $y(1)=0$ implica que $A\,e^{3/2}\left(e^{\mu}-e^{-\mu}\right)=0$.

Si asumimos $A\neq 0$, entonces $e^{\mu}-e^{-\mu}=0$, pero esto solo es posible si $\mu=0$, es decir $1-8\lambda=0$, lo cual no es posible. Por lo tanto no hay autovalores tales que $1-8\lambda>0$.

(b) Haciendo $u(x,t)=M(x)\,N(t)$ se tiene $u_x=M'(x)\,N(t)$, $u_{xx}=M''(x)\,N(t)$, $u_t=M(x)\,N'(t)$ y $u_{tt}=M(x)\,N''(t)$.

Reemplazando estas expresiones en la ecuación, obtenemos

$$M''(x)\,N(t)-3M'(x)\,N(t)=2M(x)\,N''(t)-2M(x)\,N(t)$$

Esto es equivalente a

$$M''(x)\,N(t)-3M'(x)\,N(t)+2M(x)\,N(t)=2M(x)\,N''(t)\iff\left(M''(x)-3M'(x)+2M(x)\right)\,N(t)=2M(x)\,N''(t)$$

y esto implica que

$$\frac{M''(x) - 3M'(x) + 2M(x)}{2M(x)} = \frac{N''(t)}{N(t)} = -\lambda$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} M''(x) - 3M'(x) + 2(1+\lambda)M(x) = 0 \\ N''(t) + \lambda N(t) = 0 \end{cases}$$

Con las condiciones de frontera $u(0,t) = u(1,t) = 0$ obtenemos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} M''(x) - 3M'(x) + 2(1+\lambda)M(x) = 0 \\ M(0) = M(1) = 0 \end{cases}$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = \dfrac{1}{8} + \dfrac{n^2\pi^2}{2}$, $\quad \forall n \geq 1$ y las autofunciones $M_n(x) = e^{3x/2} \operatorname{sen}(n\pi)$, $\quad \forall n \geq 1$.

Resolvemos ahora la ecuación $N''(t) + \lambda N(t) = 0$. Esta tiene por solución $N(t) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, t) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\, t)$, y entonces, con $\lambda_n = \dfrac{1}{8} + \dfrac{n^2\pi^2}{2}$

$$N_n(t) = A_n \cos\left(\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}}\, t\right)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación queda

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}}\, t\right)\right] e^{3x/2} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

A partir de la condición inicial $u(x,0) = 0$ se sigue que $A_n = 0$ para todo $n \geq 1$, por lo tanto

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}}\, t\right) e^{3x/2} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Esto implica que

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}} B_n \cos\left(\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}}\, t\right) e^{3x/2} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Ahora, usando $u_t(x,0) = e^{3x/2}$ se tiene

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

de donde

$$B_n \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}} = \frac{2}{1}\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = 2\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{n\pi\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2}}} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{8}}{(2n-1)\pi\sqrt{1+4(2n-1)^2\pi^2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2}}\,t\right)e^{3x/2}\operatorname{sen}((2n-1)\pi x)$$

Problema 10:
Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}-6x, \qquad 0<x<2, \quad t>0\\ u(0,t)=3, \quad u_x(2,t)=2, \quad t>0\\ u(x,0)=x^3-10x+3+\alpha_1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\alpha_2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{4}\right)+\cdots+\alpha_m\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{4}\right)\end{cases}$$

donde $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ son constantes reales dadas.
Solución: Definimos $u(x,t)=v(x,t)+q(x)$. Entonces tenemos:

$$u_x(x,t)=v_x(x,t)+q'(x), \qquad u_{xx}(x,t)=v_{xx}(x,t)+q''(x), \qquad u_t(x,t)=v_t(x,t)$$

Reemplazando en nuestra ecuación, obtenemos:

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}+q''(x)-6x \qquad 0<x<2, \quad t>0\\ v(0,t)+q(0)=3, \quad v_x(2,t)+q'(2)=2, \quad t>0\\ v(x,0)+q(x)=x^3-10x+3+\alpha_1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\alpha_2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+\cdots+\alpha_m\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\end{cases}$$

Esta última ecuación resulta con condiciones homogéneas si se cumple para $q(x)$ la ecuación:

$$q''(x)=6x, \qquad q(0)=3, \quad q'(2)=2$$

La solución de ésta ecuación es

$$q(x)=x^3-10x+3$$

Así, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} v_t=v_{xx} \qquad 0<x<2, \quad t>0\\ v(0,t)=0, \quad v_x(2,t)=0, \quad t>0\\ v(x,0)=\alpha_1\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\alpha_2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{4}\right)+\cdots+\alpha_m\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{4}\right)\end{cases}$$

Para resolver esta ecuación, hacemos $v(x,t)=M(x)N(t)$, entonces

$$v_t(x,t)=M(x)N'(t), \qquad v_x(x,t)=M'(x)N(t), \quad v_{xx}=M''(x)N(t)$$

Reemplazando en la ecuación resulta

$$M(x)N'(t)=M''(x)N(t)$$

, de donde

$$\frac{M''(x)}{M(x)}=\frac{N'(t)}{N(t)}=-\lambda$$

y a partir de esta igualdad se obtienen las ecuaciones para $M(x)$ y $N(t)$:

$$\begin{cases} M''(x)+\lambda M(x)=0\\ N'(t)+\lambda N(t)=0\end{cases}$$

Usando las condiciones de frontera se sigue el problema de Sturm-Liouville

$$\left.\begin{array}{r} M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ M(0) = M'(2) = 0 \end{array}\right|$$

cuyos autovalores y autofunciones son respectivamente

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{16}$$

$$M_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\, x\right)$$

con $n \geq 1$.

Resolvemos la ecuación diferencial para $N(t)$

$$N'(t) + \lambda_n N(t) = 0$$

cuyas solución es

$$N_n(t) = b_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/16}$$

De este modo, nuestra solución (formal) queda

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(t) M_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/16} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\, x\right)$$

Para calcular los coeficientes b_n, utilizamos las condiciones iniciales y nos queda:

$$v(x,0) = \alpha_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \alpha_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + \cdots + \alpha_m \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\, x\right)$$

De esta forma $b_i = \alpha_i, \quad$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Por lo tanto nuestra solución queda

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_i e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/16} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\, x\right)$$

y la solución de la ecuación original queda finalmente

$$u(x,t) = x^3 - 10x + 3 + \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/16} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{4}\, x\right)$$

Problema 11:

Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 1 < r < 2, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(r,0) = u_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 & 1 < r < 2 \\ u_r(1,\theta) = 9\operatorname{sen}(3\theta), & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ u_r(2,\theta) = 0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución: Hacemos $u(r,\theta) = M(r)N(\theta)$.
Entonces

$$u_r = M'(r)N(\theta) \qquad u_\theta = M(r)N'(\theta)$$

$$u_{rr} = M''(r)N(\theta) \qquad u_{\theta\theta} = M(r)N''(\theta)$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$M''(r)N(\theta) + \frac{1}{r}M'(r)N(\theta) + \frac{1}{r^2}M(r)N''(\theta) = 0$$

de donde

$$\frac{r^2M''(r) + rM'(r)}{M(r)} = -\frac{N''(\theta)}{N(\theta)} = \lambda$$

y de ahí se obtienen las ecuaciones para $M(r)$ y $N(\theta)$:

$$\begin{aligned} r^2M''(r) + rM'(r) - \lambda M(r) = 0 \\ N''(\theta) + \lambda N(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones de frontera para θ, se obtiene el problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned} N''(\theta) + \lambda N(\theta) = 0 \\ N(0) = N'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

cuyos autovalores y autofunciones son respectivamente $\lambda_n = (2n-1)^2$, y $N_n(\theta) = \operatorname{sen}((2n-1)\theta)$, con $n \geq 1$.
Resolvemos ahora la ecuación para $M(r)$:

$$r^2M''(r) + rM'(r) - \lambda M(r) = 0$$

Esta es una ecuación de Euler cuya solución esta dada por

$$M(r) = ar^{\sqrt{\lambda}} + br^{-\sqrt{\lambda}}$$

Considerando $\lambda = (2n-1)^2$, obtenemos $M_n(r) = a_n r^{2n-1} + b_n r^{-(2n-1)}$.
De esta forma nuestra solución (formal) es:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(r)N_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r^{2n-1} + b_n r^{-(2n-1)}\right)\operatorname{sen}((2n-1)\theta)$$

Para obtener los coeficientes, utilizamos las condiciones iniciales. Como

$$u_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)a_n r^{2n-2} - (2n-1)b_n r^{-2n}\right)\operatorname{sen}((2n-1)\theta)$$

Tenemos entonces

$$u_r(1,\theta) = 9\operatorname{sen}(3\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((2n-1)a_n - (2n-1)b_n\right)\operatorname{sen}((2n-1)\theta)$$

de donde, para $n = 2$,

$$9\operatorname{sen}(3\theta) = (3a_2 - 3b_2)\operatorname{sen}(3\theta) \qquad \text{y} \qquad \forall n \neq 2 \quad a_n = b_n$$

Resulta entonces: $a_2 - b_2 = 3$ (*).
Por otro lado $u_r(2, \theta) = 0$ implica que

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} ((2n-1)a_n 2^{2n-2} - (2n-1)2^{-2n} b_n) \operatorname{sen}((2n-1)\theta)$$

Se sigue a partir de esta ecuación

$$(2n-1)a_n 2^{2n-2} - (2n-1)b_n 2^{-2n} = 0$$

esto implica que

$$b_n = a_n 2^{4n-2}$$

Para $n = 2$, $b_2 = a_2 2^6$. Reemplazando en la ecuación (*), se obtiene

$$a_2 = \frac{3}{1-2^6}, \qquad b_2 = \frac{3 \cdot 2^6}{1-2^6}$$

y $a_n = b_n = 0$ para todo $n \neq 2$.
Finalmente, la solución pedida es

$$u(r, \theta) = \frac{3}{1-2^6} \left(r^3 + 2^6 r^{-3} \right) \operatorname{sen}(3\theta)$$